

На правах рукописи

Ковтунов Дмитрий Александрович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ГРАНИЧНЫХ
ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ
КОНВЕКЦИИ ВЫСОКОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2010

Работа выполнена в отделе прикладных задач Института математики и механики УрО РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Короткий Александр Илларионович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Денисов Александр Михайлович

кандидат физико-математических наук,
доцент Розенберг Валерий Львович

Ведущая организация: Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск

Защита диссертации состоится “16” июня 2010 г. в 13 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького».

Автореферат разослан “___” мая 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор



В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В различных областях науки и техники с целью изучения закономерностей функционирования некоторого объекта или природного явления проводятся исследования самого различного вида. Цель исследования — выявление главных закономерностей явления и, возможно, формирование на его основе некоторой математической модели. Очень часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования либо принципиально недоступен для наблюдения, либо проведение эксперимента дорого. Примерами таковых могут служить исследования по изучению внутреннего строения Земли, на основе которых можно было бы прогнозировать месторождения полезных ископаемых, предсказывать время и место разрушительных землетрясений, извержений вулканов, а также изучать динамику внутренних процессов нашей планеты. Отметим, что глубина самых глубоких скважин, пробуренных при помощи современного оборудования, не превышает 20 км, а средний радиус Земли равен 6371 км. Таким образом, для непосредственных наблюдений внутренних процессов Земли доступна лишь небольшая ее приповерхностная часть. При этом необходимо делать заключение о свойствах внутренних процессов Земли (например, об изменении ее плотности или температуры с глубиной) по измеренным в ходе эксперимента косвенным проявлениям.

В приведенной выше ситуации мы хотим определить причины, если известны полученные в результате экспериментов или наблюдений следствия. С точки зрения соотношения причина — следствие все задачи математического моделирования можно условно разделить на два больших класса: прямые задачи (известны причины, необходимо найти следствия) и обратные (известны следствия, нужно найти причины).

К *прямым задачам* относятся, например, задачи расчета механических, тепловых, электромагнитных полей для тел, свойства и конфигурация которых известны. Математический аппарат для исследований таких задач удобно представлять в виде дифференциальных уравнений.

К *обратным задачам* относят задачи определения некоторых физических характеристик объектов, таких, например, как плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, по их косвенным проявлениям. Процедура решения таких задач, состоящих в обращении причинно-следственных связей, связана с преодолением серьезных математических трудностей. Успех ее сильно зависит как от качества и количества полученной из эксперимента информации, так и от способа ее обработки. При формулировке общих постановок и выделении основных классов обратных задач предполагается известными постановки прямых задач. Заметим, что часто без умения решать прямые задачи невозможно подойти к решению обратных задач.

Постановки обратных задач, в отличие от прямых, нельзя воспроизвести в реальном эксперименте, т.е. нарушить причинно-следственную связь не математическим, а физическим путем. И в этом смысле они не соответствуют физически реализуемым событиям. Например, нельзя обратить ход физического процесса и тем более изменить течение времени. Таким образом, можно условно говорить о естественной природе некорректности постановки обратной задачи. Естественно, что при математической формализации она проявляется уже как математическая некорректность (чаще всего неустойчивость решения), и обратные задачи представляют собой типичный пример некорректно поставленных задач.

Основополагающий вклад в развитие теории и методов решения некорректных задач внесли А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев, В.К. Иванов. Большой вклад в развитие некорректных и обратных задач внесли Г.И. Марчук, В.Я. Арсенин, В.А. Морозов, А.Б. Бакушинский, В.Б. Гласко, В.В. Васин, А.Г. Ягола, О.М. Алифанов, В.Г. Романов, А.М. Денисов, Ф.П. Васильев, С.И. Кабанихин, А.С. Леонов, О.А. Лисковец, И.В. Мельникова, Л.Д. Менихес, В.П. Танана, А.И. Прилепко, Ю.Е. Аниконов, А.Л. Бухлейм и многие другие математики.

С позиций математического моделирования алгоритм численного решения обратных задач состоит в сведении обратной задачи к решению последовательности корректных задач, которые можно решать численно. Реализация методов решения некорректных задач связана с численным решением соответствующих дифференциальных задач. При этом широко используется математический аппарат разностных схем, разработанных в школах А.А. Самарского, Г.И. Марчука, Н.Н. Яненко.

Развитие теории и методологии решения обратных задач, как актуального направления исследований, вызвано насущными потребностями практики и базируется на математической теории некорректно поставленных задач, оптимальных принципах планирования эксперимента, современных численных методах и должно соответствовать характеру и уровню развития вычислительной техники и программного обеспечения.

Одним из важных классов обратных задач являются обратные задачи тепло- и массообмена. Многие обратные задачи теплообмена достаточно хорошо изучены^{1 2 3 4 5}. Однако встречаются и более сложные модели теплообмена, такие как, например, естественная тепловая конвекция, для которых

¹ Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М. : Машиностроение. 1988.

² Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во МГУ. 1994.

³ Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопроводности. Киев : Наукова думка. 1982.

⁴ Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В. Идентификация в задачах теплопроводности. Киев : Наукова думка. 1982.

⁵ Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М. : Мир. 1989.

известно сравнительно мало результатов в связи с решением обратных задач⁶
7 8.

Под тепловой конвекцией понимают перенос теплоты в жидкостях, газах или сыпучих средах потоками вещества. Естественная конвекция возникает при неравномерном нагреве текучих или сыпучих веществ, находящихся в поле силы тяжести (или в системе, движущейся с ускорением). Вещество, нагретое сильнее, имеет меньшую плотность и под действием архимедовой силы перемещается относительно менее нагретого вещества. Направление архимедовой силы, а следовательно, и конвекции для нагретых объемов вещества противоположно направлению силы тяжести. Конвекция приводит к выравниванию температуры вещества. При стационарном подводе теплоты к веществу в нем возникают стационарные конвекционные потоки, переносящие теплоту от более нагретых слоев к менее нагретым. С уменьшением разности температур между слоями интенсивность конвекции падает. При высоких значениях теплопроводности и вязкости среды конвекция также оказывается ослабленной. Конвекция широко распространена в природе: в нижнем слое земной атмосферы, морях и океанах, в недрах Земли, на Солнце и т.д. С помощью конвекции осуществляют охлаждение или нагревание жидкостей и газов в различных технических устройствах.

Одной из стационарных моделей тепловой конвекции является модель естественной тепловой конвекции высоковязкой жидкости в приближении Буссинеска^{9 10}. Данная математическая модель может быть использована для моделирования температурного режима осадочных бассейнов¹¹, вулканических провинций¹², стационарной конвекции в мантии Земли⁹. Решение этих геофизических задач чрезвычайно важно с точки зрения их прикладного характера: осадочные бассейны являются природными хранителями полезных ископаемых, в частности, большинство исследованных месторождений нефти и газа связаны с такими геологическими структурами; изучение вулканов и их теплового режима помогает в предсказании вулканических извержений; мантийная конвекция является одной из причин движения континентов на планете и источником землетрясений, происходящим на границах разломов литосферных плит. Кроме того, модель конвекции высоковязкой жидкости

⁶ *Payan S.* Inverse boundary design of square enclosures with natural convection // *Int. J. of Thermal Sciences*. 2009. Vol. 48. № 4. P. 682–690

⁷ *Prud'homme M., Nguyen T.H.* Solution of inverse free convection problems by conjugate gradient method: effects of Rayleigh number // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2001. Vol. 44. № 11. P. 2011–2027

⁸ *Payan S., Salvari S.M.H., Ajam H.* Inverse natural convection problem of estimating wall heat flux // *Chemical Engineering Science*. 2000. Vol. 55. № 11. P. 2131–2141

⁹ *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York : Dover. 1981.

¹⁰ *Ландау Л.Д., Луфшутц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. М. : Наука. 1988. Т. 6.

¹¹ *Schubert G., Turcotte D.L., Olson P.* Mantle convection in the Earth and planets. United Kingdom : Cambridge University Press. 2004.

¹² *Turcotte D.L., Schubert G.* Geodynamics. Cambridge : Cambridge University Press. 2002.

может использоваться в промышленности при моделировании процесса изготовления стекла в плавильных печах¹³.

Из сказанного выше следует, что тема диссертации актуальна.

Цель работы. Целью работы является теоретическое исследование прямой задачи стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости, разработка методов численного решения соответствующей обратной граничной задачи, а также разработка соответствующих алгоритмов и проведение вычислительных экспериментов.

Методы исследования. Основные результаты диссертации получены с применением методов математического моделирования, теории обратных и некорректных задач, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории оптимизации, методов вычислительной математики. Для проведения вычислительных экспериментов применялись современные технологии программирования.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми. Они обобщают и дополняют работы отечественных и зарубежных исследователей по данной проблематике. Достоверность полученных результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами, соответствием полученных теоретических результатов результатам компьютерного моделирования, использованием общепризнанных апробированных математических методов и согласованностью результатов, полученных различными способами.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа имеет теоретическую и практическую ценность. В работе получены теоретические результаты по исследованию прямой и обратной задач для модели стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости. Разработанные подходы и методы исследования могут быть применены при теоретическом исследовании других важных моделей тепловой конвекции. Практическая значимость работы заключается в том, что предложенные в ней вычислительные методы и алгоритмы могут быть использованы при решении прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Международном семинаре «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби», посвященном 60-летию академика А.И. Субботина (Екатеринбург, 2005); на Международной конференции «Тихонов и современная математика: Обратные и некорректно поставленные задачи» (Москва, 2006); на III и IV Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной

¹³ *Hajime I.* Numerical simulation of thermal convection in a fluid with the infinite Prandtl number and its application to a glass manufacturing problem // *Hiroshima Math. J.* 1999. Vol. 29. № 1. P. 27—60.

памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау—Дюрсо, 2006, 2008); на Международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова (Екатеринбург, 2008); на Международной конференции «Актуальные проблемы теории устойчивости и управления» (Екатеринбург, 2009).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1—11]. Работы [1—4] опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах из перечня ВАК. В совместных работах [1, 2, 5, 6] научному руководителю А.И. Короткому принадлежат постановки задач, общее руководство исследованиями по теме диссертации и идеи доказательств основных утверждений, а диссертанту — доказательства основных теорем, разработка численных алгоритмов и программных средств для проведения численного моделирования. В работах [4, 11] диссертанту принадлежат реализация численных методов, разработка программных средств и проведение вычислительных экспериментов. В работе [7] А.Т. Исмаилу-Заде принадлежит физическая постановка задачи, А.И. Короткому — математическая постановка задачи, И.А. Цепелеву — идеи численного решения задачи, а диссертанту — реализация численных методов и разработка программных средств.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объем работы составляет 160 страниц. Список литературы включает 93 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы исследования, излагаются цели и краткое содержание диссертации.

В первой главе рассматривается прямая задача стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости в приближении Буссинеска¹¹

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - \text{Ra} T \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$\Delta T = \mathbf{u} \nabla T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

$$T|_{\Gamma_D} = v, \quad \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = w, \quad (5)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) — область с границей $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\text{mes } \Gamma_D > 0$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x}))$ — вектор скорости движения жидкости; $p = p(\mathbf{x})$ — давление; $T = T(\mathbf{x})$ — температура;

$v = v(\mathbf{x})$ и $w = w(\mathbf{x})$ — заданные температурные режимы на Γ_D и Γ_N соответственно; Ra — число Рэлея; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ ; \mathbf{e}_n — орт оси x_n .

В качестве Ω рассматривались ограниченные области, принадлежащие одному из следующих классов^{14 15}:

- *Класс C^2* . К такому классу принадлежат области с достаточно гладкой границей.
- *Класс $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{X}$* , который включает области, удовлетворяющие трем условиям: условию строгой липшицевости, условию равномерной ограниченности собственных чисел соответствующей квадратичной формы и условию \mathfrak{X} сильной разрешимости задачи Пуассона с гладкой правой частью и смешанными однородными граничными условиями. К такому классу, в частности, принадлежит прямоугольная область.

Требовалось исследовать вопрос о разрешимости краевой задачи (1)—(5) в некотором слабом смысле.

При исследовании разрешимости краевой задачи (1)—(5) использовались пространства Лебега $L_m(\Omega)$ и пространства Соболева $W_m^l(\Omega)$, $m \geq 1$, $l \geq 1$ ^{14 15 16 17}, а также их векторные аналоги $\mathbf{L}_m(\Omega)$ и $\mathbf{W}_m^l(\Omega)$ соответственно. Кроме того, использовались пространства

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u}|_{\Gamma} = 0, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}^{18},$$

$$G_1(\Omega) = \{g \in W_2^1(\Omega) : g|_{\Gamma_D} = 0\},$$

$$G_2(\Omega) = \{g \in W_2^2(\Omega) : g|_{\Gamma_D} = 0, \partial g / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}.$$

Вводилось понятие слабого решения краевой задачи (1)—(5). Для заданных функций $v \in L_2(\Gamma_D)$ и $w \in L_2(\Gamma_N)$ под слабым решением краевой задачи (1)—(5) понимается пара функций $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющая тождествам

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} T \mathbf{e}_n \mathbf{f} dx, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta g + \mathbf{u} \nabla g) T dx = \int_{\Gamma_D} v \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_N} w g d\Gamma, \quad \forall g \in G_2(\Omega). \quad (7)$$

¹⁴ Adams R.A. Sobolev spaces. New York : Acad. Press. 1975.

¹⁵ Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука. 1973.

¹⁶ Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука. 1988.

¹⁷ Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М. : Наука. 1976.

¹⁸ Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : Физматгиз. 1961.

Тождества (6), (7) получались умножением уравнений (1), (3) на функции $\mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega)$ и $g \in G_2(\Omega)$ соответственно, интегрированием результата по Ω с применением формулы интегрирования по частям, а также с учетом граничных значений функций \mathbf{u} , T , \mathbf{f} , g и условия несжимаемости (2).

Отметим, что переход к вариационной формулировке (6), (7) краевой задачи (1)–(5) позволил исключить из рассмотрения искомую скалярную функцию p , а также уравнение (2), причем граничные условия (4), (5) вошли в интегральные тождества в компактном виде. При известной паре (\mathbf{u}, T) функцию p можно с точностью до постоянной найти из уравнения (1).

Для упрощения исследования исходной краевой задачи (1)–(5) был осуществлен переход к исследованию соответствующей краевой задачи с однородными граничными условиями. Для этого рассматривалась следующая вспомогательная краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8)$$

$$\Phi|_{\Gamma_D} = v, \quad \partial \Phi / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = w. \quad (9)$$

Слабым решением краевой задачи (8), (9) называется функция $\Phi \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \Phi \Delta g \, dx = \int_{\Gamma_D} v \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_N} w g \, d\Gamma, \quad \forall g \in G_2(\Omega). \quad (10)$$

Методом транспонирования¹⁹ доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Слабое решение краевой задачи (8), (9) существует и единственно, причем справедлива оценка*

$$\|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \leq c_4 \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1 c_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)}. \quad (11)$$

Везде в оценках под c_i понимаются положительные константы, не зависящие от оцениваемых величин. В большинстве случаев, c_i — константы, которые фигурируют в неравенствах из теорем вложения^{14 16 20}.

Рассматривалась следующая однородная задача, соответствующая краевой задаче (1)–(5):

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - \text{Ra} (\tilde{T} + \Phi) \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (12)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (13)$$

$$\Delta \tilde{T} = \mathbf{u} (\nabla \tilde{T} + \nabla \Phi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (14)$$

¹⁹ Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М. : Мир. 1972.

²⁰ Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука. 1973

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0, \quad (15)$$

$$\tilde{T}|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial \tilde{T} / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0, \quad (16)$$

где $\tilde{T} = T - \Phi$, а Φ — решение краевой задачи (8), (9).

В силу того, что вспомогательная краевая задача (8), (9) однозначна разрешима, вопрос о разрешимости краевой задачи (1)—(5) был сведен к вопросу о разрешимости краевой задачи (12)—(16). Под решением этой задачи понимается ее обобщенное решение (исходные данные позволяют это сделать).

Под обобщенным решением однородной краевой задачи (12)—(16) понимается пара функций $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$, удовлетворяющая тождествам

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} (\tilde{T} + \Phi) \mathbf{e}_n \mathbf{f} dx, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla g + \mathbf{u} g) \nabla \tilde{T} dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla g \Phi dx, \quad \forall g \in G_1(\Omega), \quad (18)$$

где Φ — слабое решение краевой задачи (8), (9).

Доказана следующая основная теорема о разрешимости задачи (1)—(5).

Теорема 2. *Если исходные данные краевой задачи (1)—(5) таковы, что $v \in L_2(\Gamma_D)$, $w \in L_2(\Gamma_N)$, и выполняется неравенство*

$$2 n c_1 c_5 \text{Ra} (c_4 \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1 c_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)}) < 1,$$

то ее слабое решение $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющее тождествам (6), (7), существует и единственно. Кроме того, $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$, а компонента T слабого решения может быть представлена в виде суммы $T = \tilde{T} + \Phi$, состоящей из компоненты $\tilde{T} \in G_1(\Omega)$ обобщенного решения $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$ краевой задачи (12)—(16) с однородными граничными условиями для T и слабого решения $\Phi \in L_2(\Omega)$ вспомогательной задачи (8), (9) с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы следующие оценки:

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{n c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}},$$

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq \frac{c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}.$$

Доказана корректность прямой задачи (1)—(5). Прямая задача считалась корректно поставленной, если ее слабое решение $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ существует, единственно и оно непрерывно зависит от входных граничных данных

$v \in L_2(\Gamma_D)$, $w \in L_2(\Gamma_N)$. Кроме того, исследованы свойства гладкости слабого решения (\mathbf{u}, T) при повышении гладкости v и w .

Рассматривалась обратная граничная задача, соответствующая прямой задаче (1)–(5). Построен оператор прямой задачи и доказано, что он является вполне непрерывным, т.е. не имеет ограниченного обратного. Таким образом, показана некорректность обратной задачи.

Рассматривались также частные случаи прямой и обратной задач для прямоугольной области $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : x_1 = 0 \vee x_1 = l_1\}$, $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : x_2 = 0\}$, $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : x_2 = l_2\}$.

Прямая задача 1 состоит в том, чтобы найти пару $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u} &= \nabla p - \text{Ra} T \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \Delta T &= \mathbf{u} \nabla T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma} &= 0, \\ \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_0} &= 0, \quad T|_{\Gamma_1} = q_1, \quad T|_{\Gamma_2} = q_2.\end{aligned}$$

Прямая задача 2 состоит в том, чтобы найти пару $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u} &= \nabla p - \text{Ra} T \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \Delta T &= \mathbf{u} \nabla T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma} &= 0, \\ \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_0} &= 0, \quad T|_{\Gamma_1} = q_1, \quad \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = q_2.\end{aligned}$$

Все результаты полученные для прямой задачи (1)–(5) справедливы и для прямых задач 1 и 2, причем для прямой задачи 1 вместо (11) справедливо неравенство

$$\|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}} l_2 (\|q_1\|_{L_2(\Gamma_1)} + \|q_2\|_{L_2(\Gamma_2)}),$$

а для прямой задачи 2 справедливо неравенство

$$\|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}} l_2 \left(\sqrt{3} \|q_1\|_{L_2(\Gamma_1)} + l_2 \|q_2\|_{L_2(\Gamma_2)} \right).$$

Если в прямой задаче 1 температурный режим $T|_{\Gamma_1} = q_1$ неизвестен, остальные условия остаются прежними и дополнительно на верхней границе Γ_2 наблюдается (замеряется) поток тепла

$$\partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \varphi,$$

то *обратная задача 1* состоит в том, чтобы по результатам этих наблюдений найти температурный режим q_1 .

Если в прямой задаче 2 температурный режим $T|_{\Gamma_1} = q_1$ неизвестен, остальные условия остаются прежними и дополнительно на верхней границе Γ_2 наблюдается (замеряется) температурный режим

$$T|_{\Gamma_2} = \varphi,$$

то *обратная задача 2* состоит в том, чтобы по результатам этих наблюдений найти температурный режим q_1 .

Прямые и обратные задачи 1 и 2 можно свести к аналогичным задачам в непрямоугольной области, если воспользоваться методом фиктивных областей²¹.

Во второй главе разрабатывается вариационный метод численного решения обратных задач 1 и 2. Вариационный метод основан на сведении исходной обратной задачи к некоторой равносильной вариационной задаче на минимум подходящего целевого функционала и нахождении минимума этого функционала одним из методов минимизации.

Нахождение теплового режима $T|_{\Gamma_1} = q_1$ в обратной задаче 1 было сведено к соответствующей вариационной задаче 1

$$J_1(q_1) = \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial T_{q_1}}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right)^2 d\Gamma \rightarrow \min : q_1 \in V_1,$$

где T_{q_1} — компонента решения прямой задачи 1, а V_1 — множество допустимых граничных режимов на Γ_1 .

В предположении, что $V_1 = \{q_1 \in W_2^2(\Gamma_1) : q_1'(0) = q_1'(l_1) = 0\}$, $\varphi \in L_2(\Gamma_2)$, был найден L_2 -градиент ∇J_1 функционала J_1

$$\nabla J_1(q_1) = \partial \omega / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1},$$

$$J_1(q_1 + h) - J_1(q_1) = \langle \nabla J_1(q_1), h \rangle_{L_2(\Gamma_1)} + o(\|h\|_{W_2^2(\Gamma_1)}), \quad \forall h \in V_1,$$

где ω — компонента решения следующей сопряженной задачи 1:

$$\Delta \mathbf{z} + \omega \nabla T_{q_1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

²¹ Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей для задачи математической физики. М. : Изд-во Моск. ун-та. 1991.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
\Delta \omega + \mathbf{u}_{q_1} \nabla \omega - \operatorname{Ra} \mathbf{z} \mathbf{e}_2 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
\mathbf{z}|_{\Gamma} &= 0, \quad \partial \omega / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \omega|_{\Gamma_1} = 0, \quad \omega|_{\Gamma_2} = 2 \left(\frac{\partial T_{q_1}}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right).
\end{aligned}$$

Нахождение теплового режима $T|_{\Gamma_1} = q_1$ в обратной задаче 2 было сведено к соответствующей вариационной задаче 2

$$J_2(q_1) = \int_{\Gamma_2} (T_{q_1} - \varphi)^2 d\Gamma \rightarrow \min : q_1 \in V_2,$$

где T_{q_1} — компонента решения прямой задачи 2, а V_2 — множество допустимых граничных режимов на Γ_1 .

В предположении, что $V_2 = W_2^1(\Gamma_1)$, $\varphi \in L_2(\Gamma_2)$, был найден L_2 -градиент ∇J_2 функционала J_2

$$\begin{aligned}
\nabla J_2(q_1) &= \partial \omega / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1}, \\
J_2(q_1 + h) - J_2(q_1) &= \langle \nabla J_2(q_1), h \rangle_{L_2(\Gamma_1)} + o(\|h\|_{W_2^1(\Gamma_1)}), \quad \forall h \in V_2,
\end{aligned}$$

где ω — компонента решения следующей сопряженной задачи 2:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{z} + \omega \nabla T_{q_1} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
\operatorname{div} \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
\Delta \omega + \mathbf{u}_{q_1} \nabla \omega - \operatorname{Ra} \mathbf{z} \mathbf{e}_2 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
\mathbf{z}|_{\Gamma} &= 0, \quad \partial \omega / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \omega|_{\Gamma_1} = 0, \quad \omega|_{\Gamma_2} = -2(T_{q_1} - \varphi).
\end{aligned}$$

Для нахождения точек минимума в вариационных задачах 1 и 2, после конечномерной дискретизации, использовался метод сопряженных градиентов Флетчера — Ривса^{22 23} с «неточным» поиском шага спуска, удовлетворяющего строгим условиям Вольфа²⁴.

Опишем кратко схему численного решения вариационной задачи 1 методом сопряженных градиентов. Для вариационной задачи 2 схема аналогична. На каждой итерации последовательно выполнялись следующие четыре шага:

1. Данное $q_1 = q_1^{(k)} \in V_1$ подставляем в граничное условие прямой задачи 1 и находим решение $(\mathbf{u}_{q_1}, T_{q_1})$ этой краевой задачи (давление p_{q_1} далее не используется).
2. Подставляем $(\mathbf{u}_{q_1}, T_{q_1})$ в сопряженную задачу 1 и находим ее решение (\mathbf{z}, ω) (\mathbf{z} далее не используется).

²² Полак Э. Численные методы оптимизации. Общий подход. М. : Мир. 1974.

²³ Nocedal J. Numerical optimization. New York : Springer. 1999.

²⁴ Gilbert J.Ch., Nocedal J. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization // SIAM J. Optimization. 1992. Vol. 2. № 1. P. 21—42.

3. Вычисляем $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}$ на Γ_1 , это и есть градиент $\nabla J_1(q_1)$:

$$\nabla J_1(q_1) = -\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(x_1, 0), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1.$$

4. Выполняем очередную итерацию метода сопряженных градиентов и находим новое приближение решения $q_1^{(k+1)}$.

Вычисления останавливаем при выполнении условия

$$J_1(q_1^{(k)}) < \varepsilon,$$

где ε — некоторое заданное достаточно малое положительное число.

Прямые и сопряженные задачи 1 и 2 решались конечно-разностными методами. Для упрощения исходных систем уравнений в прямой и сопряженной задачах использовался переход от естественных переменных «скорость, давление» к переменным «функция тока, вихрь скорости»^{25 26}. Вводилась замена

$$u_1 = \partial \psi / \partial x_2, \quad u_2 = -\partial \psi / \partial x_1, \\ \text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } (u_1, u_2, 0) = (0, 0, \eta), \quad \eta = \partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2,$$

где ψ — функция тока, η — третья компонента вихря скорости. В результате, прямая задача 1 преобразовывалась к виду

$$-\Delta \eta = \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (19)$$

$$-\Delta \psi = \eta, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (20)$$

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (21)$$

$$\psi|_{\Gamma} = 0, \quad \partial \psi / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \quad (22)$$

$$\partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_0} = 0, \quad T|_{\Gamma_1} = q_1, \quad T|_{\Gamma_2} = q_2. \quad (23)$$

Для численного решения уравнений (19), (20) прямой задачи при фиксированном T использовалась безусловно устойчивая линеаризованная разностная схема стабилизирующей поправки²⁵. Для численного решения уравнения (21) при фиксированном ψ использовалась условно монотонная устойчивая неявная схема центральных разностей²⁵.

Разностная схема для задачи (19)—(23) записывалась в следующем виде:

$$\frac{\eta_{n+1/2} - \eta_n}{\tau} + \Lambda \eta_{n+1/2} - \text{Ra} (T_{n+1})_{x_1}^{\circ} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1} - \eta_{n+1/2}}{\tau} + \sigma(x) (\psi_{n+1} - \psi_n) = 0, \quad (25)$$

$$\eta_{n+1} = \Lambda \psi_{n+1}, \quad (26)$$

$$\frac{T_{n+1} - T_n}{\tau} + V(\mathbf{u}_n) T_{n+1} + \Lambda T_{n+1} = 0, \quad (27)$$

²⁵ Булеев Н.И. Пространственная модель турбулентного обмена. М. : Наука. 1989.

²⁶ Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М. : Едиториал УРСС. 2003.

$$\begin{aligned}\Lambda y &= \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2}, \\ \sigma(x) &= \sigma_1(x_1) + \sigma_2(x_2), \quad \sigma_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0, & h_\alpha < x_\alpha < l_\alpha - h_\alpha, \\ 2/h_\alpha^4, & x_\alpha = h_\alpha, l_\alpha - h_\alpha, \end{cases} \\ V(\mathbf{u}) T &= V_1(u_1) T + V_2(u_2) T, \quad V_\alpha(u_\alpha) T = \frac{1}{2} \left((u_\alpha T)_{\dot{x}_\alpha} + u_\alpha T_{\dot{x}_\alpha} \right).\end{aligned}$$

Первый этап (разностное уравнение (24)) реализации схемы (24)–(27) состоит в нахождении вихря $\eta_{n+1/2}$, когда граничное условие для вихря берется с предыдущего временного слоя

$$\eta_{n+1/2}|_\Gamma = \eta_n.$$

Второй этап (разностное уравнение (25)) можно рассматривать как вычисление функции тока ψ_{n+1} с коррекцией на явное задание граничных условий для вихря. При этом используется следующее граничное условие

$$\psi_{n+1}|_\Gamma = 0.$$

Третий этап (разностное уравнение (26)) состоит в непосредственном вычислении вихря η_{n+1} , причем граничные значения берутся из хорошо известных условий Тома^{25 27 28}

$$\begin{aligned}\eta_{n+1}(x) &= \begin{cases} g_{n+1}(x_1 + h_1, x_2), & x_1 = 0, \\ g_{n+1}(x_1 - h_1, x_2), & x_1 = l_1, \\ g_{n+1}(x_1, x_2 + h_2), & x_2 = 0, \\ g_{n+1}(x_1, x_2 - h_2), & x_2 = l_2, \end{cases} \\ g_{n+1}(x) &= - \sum_{\alpha=1}^2 h_\alpha^2 \sigma_\alpha(x_\alpha) \psi_{n+1}(x).\end{aligned}$$

Четвертый этап (разностное уравнение (27)) состоит в определении температуры T_{n+1} с использованием смешанных граничных условий

$$\partial T_{n+1} / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_0} = 0, \quad T_{n+1}|_{\Gamma_1} = q_1, \quad T_{n+1}|_{\Gamma_2} = q_2,$$

где производная на границе Γ_0 аппроксимируется со вторым порядком точности обычным образом.

Для прямой задачи 2, а также сопряженных задач 1 и 2, разностные схемы выписываются аналогичным образом. При аппроксимации граничных условий Неймана использовался метод фиктивных узлов²⁹. При решении сеточных эллиптических задач, получающихся при разностной дискретизации ис-

²⁷ Роч П. Вычислительная гидродинамика. М. : Мир. 1980.

²⁸ Weinan E., Liu J.-G. Vorticity boundary condition and related issues for finite difference schemes // J. Comp. Phys. 1996. Vol. 124. № 2. P. 386–382

²⁹ Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М. : Наука. 1989.

ходных уравнений, использовался попеременно-треугольный метод приближенной факторизации — сопряженных градиентов^{24 25 30}, т.к. он является достаточно эффективным в том случае, когда матрица системы имеет сильно разреженную структуру или является несамосопряженной.

Проводилась серия вычислительных экспериментов моделирования обратных задач 1 и 2 вариационным методом для следующих вариантов:

1. Восстановление постоянного граничного режима $q_1^* = 1$.

2. Восстановление гладкого граничного режима $q_1^* = \cos(2\pi x_1)$.

3. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима

$$q_1^* = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_1 \leq 0.25, \\ 4(x_1 - 0.25), & 0.25 \leq x_1 \leq 0.5, \\ 4(0.75 - x_1), & 0.5 \leq x_1 \leq 0.75, \\ 0, & 0.75 \leq x_1 \leq 1; \end{cases}$$

4. Восстановление разрывного граничного режима

$$q_1^* = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_1 \leq 0.25, \\ 1, & 0.25 \leq x_1 \leq 0.75, \\ 0, & 0.75 \leq x_1 \leq 1. \end{cases}$$

Для решения каждого из перечисленных вариантов обратной задачи 1 и 2 проводился следующий квазиреальный эксперимент:

- При заданных граничных условиях $q_1 = q_1^*$ и $q_2 = 0$ определялось дополнительное граничное условие φ на Γ_2 через решение соответствующей прямой задачи.
- Решалась обратная задача восстановления q_1 .
- Проверялась близость полученного приближения q_1 с точным решением q_1^* .

В табл. 1 и на рис. 1—4 приведены результаты восстановления в обратной задаче 1 для перечисленных вариантов.

Вариант	1	2	3	4
Критерий останова, ε	10^{-8}	10^{-7}	$5 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-10}$
Число итераций	3	5	50	37
Относ. погрешность, $\delta q_1\%$	0.01	1	34	46

Табл. 1. Сравнение результатов расчетов вариантов 1—4 обратной задачи 1.

³⁰ Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М. : Физматлит. 1995.

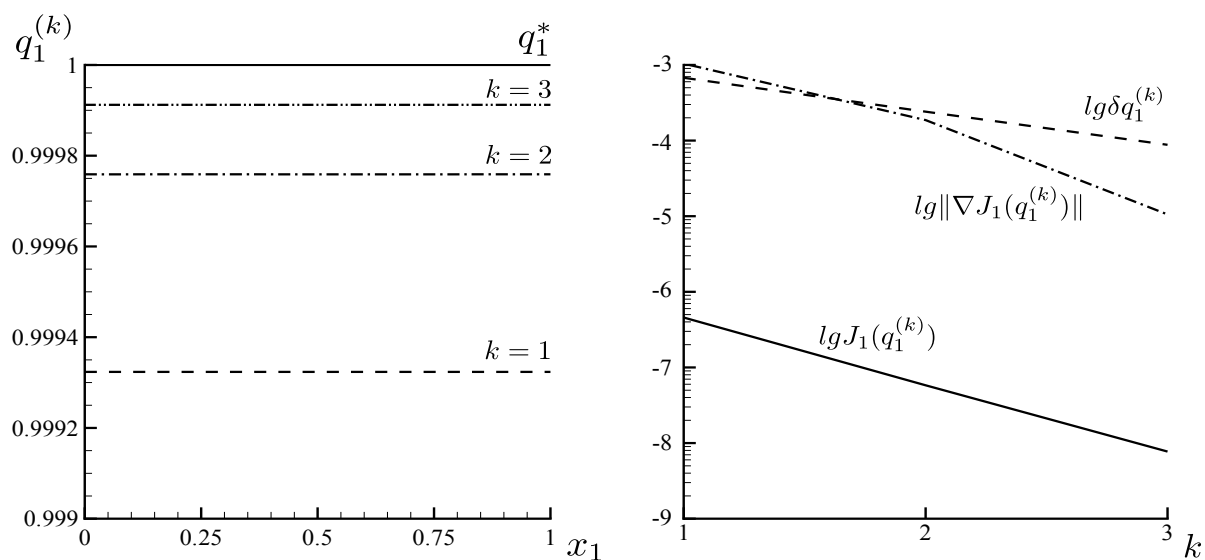


Рис. 1. Восстановление постоянного граничного режима.

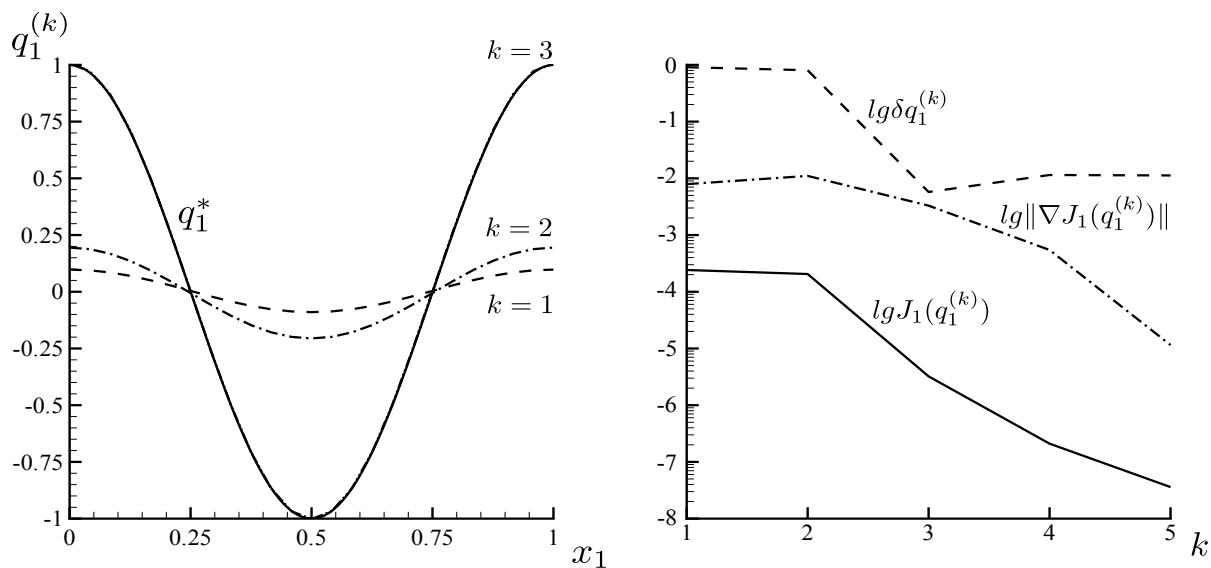


Рис. 2. Восстановление гладкого граничного режима.

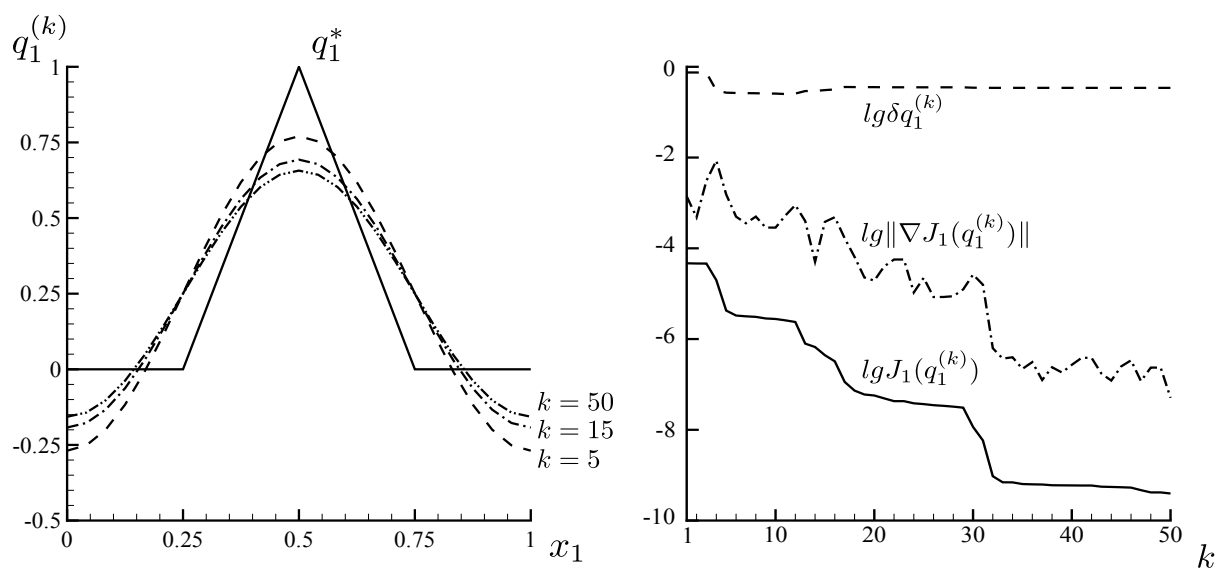


Рис. 3. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима.

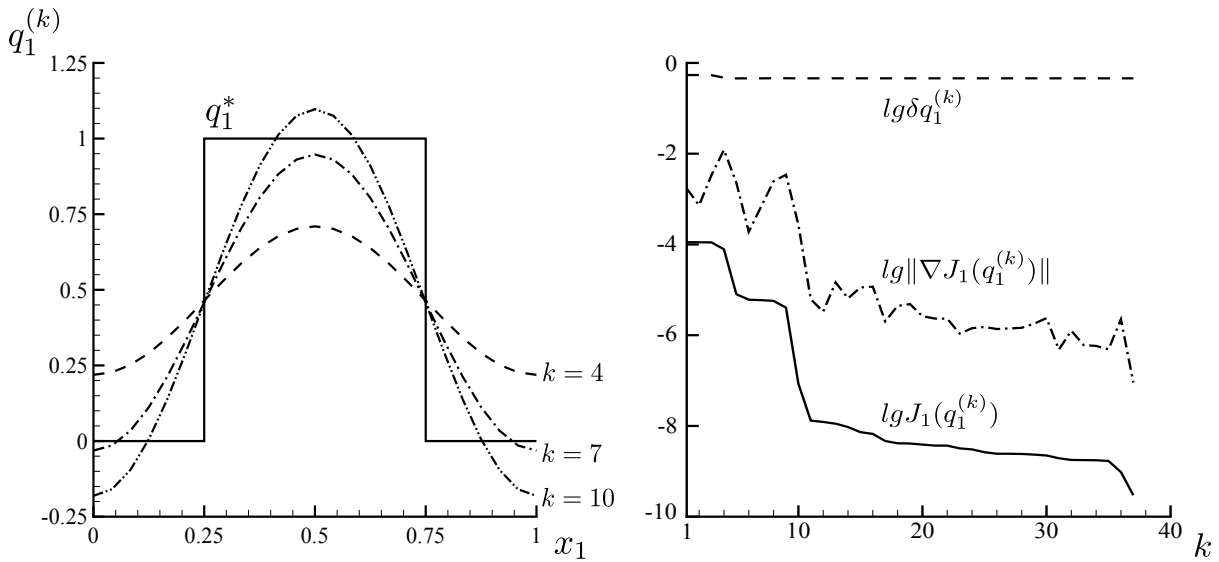


Рис. 4. Восстановление разрывного граничного режима.

По полученным данным можно сделать заключение о применимости вариационного метода к решению обратной задачи 1. Причем, в случае восстановления постоянного и гладкого граничных режимов метод дает достаточно хорошие результаты. В остальных случаях метод показывает сходимость к точным решениям по функционалу и градиенту, но полученные численные решения достаточно плохого качества. Для обратной задачи 2 вариационный метод дает результаты схожие с представленными.

В третьей главе разрабатывается метод квазиобращения³¹ численного решения обратных задач 1 и 2, который состоит в добавлении к дифференциальному оператору в уравнении конвекции-диффузии некоторых дополнительных дифференциальных членов с малыми параметрами. При стремлении малых параметров к нулю решение возмущенной краевой задачи в определенном смысле может стремиться к решению исходной задачи. Возмущенная задача имеет следующий вид:

$$\Delta \mathbf{u}_\alpha = \nabla p_\alpha - \text{Ra } T_\alpha \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (28)$$

$$\text{div } \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\Delta T_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \nabla T_\alpha + \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (29)$$

Рассматривалась задача для возмущенного уравнения конвекции-диффузии (29) при известном поле скоростей \mathbf{u}_α . В этой задаче на Γ_2 заданы температура и поток тепла. Поэтому ее можно рассматривать как задачу продолжения температурного поля с Γ_2 во всю область Ω , т.е. как эволюционную задачу по пространственной переменной x_2 . Если ввести обозначения

³¹ Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М. : Мир. 1970

$t = l_2 - x_2$, $x = x_1$, $l = l_1$, $\vartheta = l_2$, $u^{(1)} = u_1$, $u^{(2)} = u_2$, то задача для возмущенного уравнения примет вид

$$\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial t^2} + u_\alpha^{(2)} \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x^2 \partial t^2} + u_\alpha^{(1)} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial x^2}. \quad (30)$$

Это уравнение дополняется начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} T_\alpha(x, 0) = q_2, \quad \frac{\partial T_\alpha}{\partial t}(x, 0) = -\varphi(x), \quad 0 < x < l, \\ \frac{\partial T_\alpha}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial T_\alpha}{\partial x}(l, t) = 0, \quad 0 < t < \vartheta. \end{aligned} \quad (31)$$

Для нахождения приближенного решения $\{\mathbf{u}_\alpha, T_\alpha\}$ обратной задачи 1 начально-краевая задача (30), (31) дополняется краевой задачей (19), (20), (22) для определения поля скоростей, выраженной в переменных «функция тока, вихрь скорости».

Рассмотренный метод можно аналогично применить и к обратной задаче 2. Для этого достаточно везде в рассуждениях поменять местами функции q_2 и φ . Заметим, что в приведенной реализации метода квазиобращения не важно какое из двух условий, заданных на границе Γ_2 , считать основным, а какое — дополнительным. Поэтому предложенный метод квазиобращения фактически одинаково применяется к обратным задачам 1 и 2.

Использовался метод квазиоптимального выбора параметра регуляризации^{32 33}. Параметр α выбирался среди элементов последовательности

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad 0 < q < 1, \quad k = \overline{1, M}$$

и для нахождения приемлемого значения параметра регуляризации минимизировалась норма

$$\varrho(q_1(\alpha_{k+1})) = \|q_1(\alpha_{k+1}) - q_1(\alpha_k)\| \rightarrow \min : k = \overline{0, M-1}, \quad q_1(\alpha) = T_\alpha(\cdot, 0).$$

В табл. 2 и на рис. 5—8 приведены результаты моделирования обратных задач 1 и 2 методом квазиобращения для перечисленных выше вариантов.

Вариант	1	2	3	4
Квазиоптимальный номер, k	0	5	5	4
Относ. погрешность, $\delta q_1(\alpha_k)\%$	0.03	19	34	44

Табл. 2. Сравнение результатов расчетов вариантов 1—4 обратной задачи 1.

³² Тихонов А.Н., Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // ЖВМиМФ. 1965 Т. 5. № 3. С. 463—473.

³³ Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М. : Едиториал УРСС. 2004.

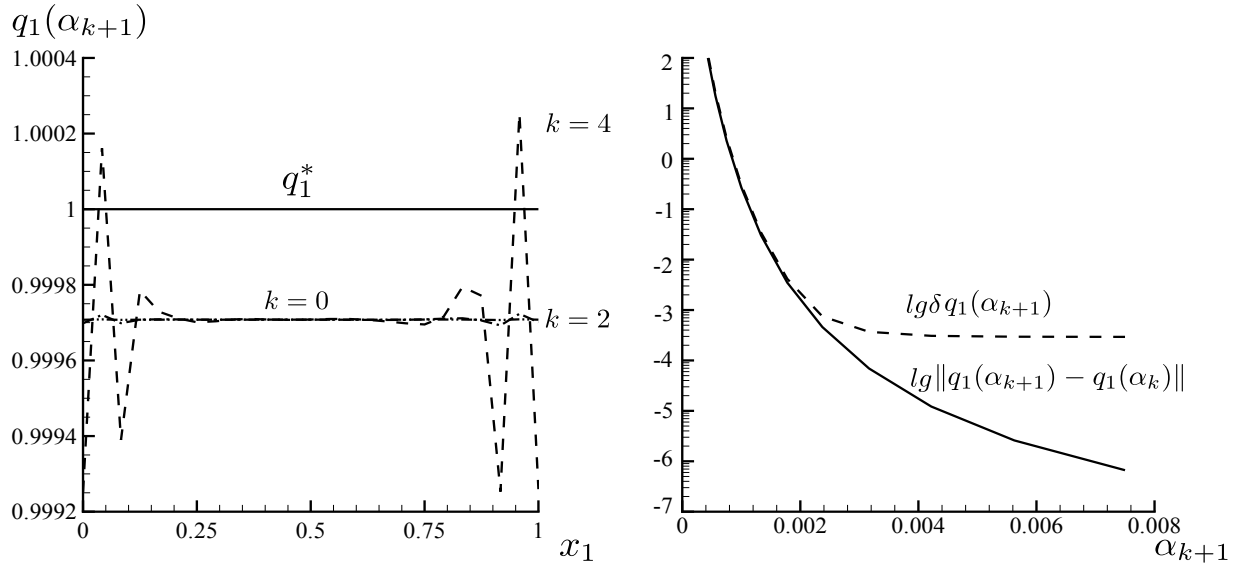


Рис. 5. Восстановление постоянного граничного режима.

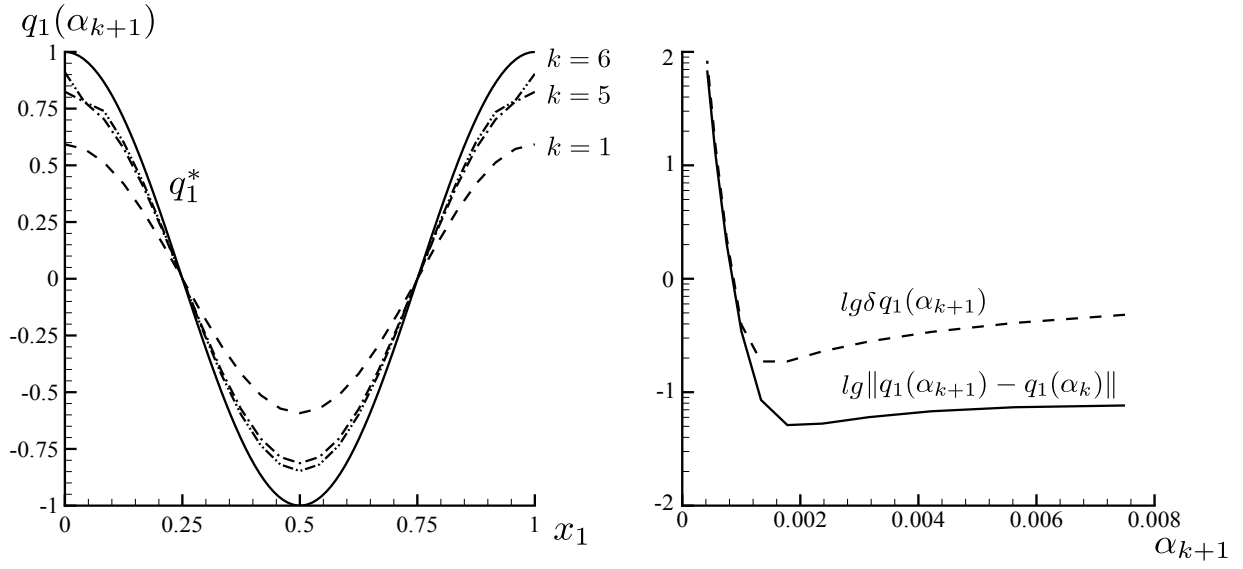


Рис. 6. Восстановление гладкого граничного режима.

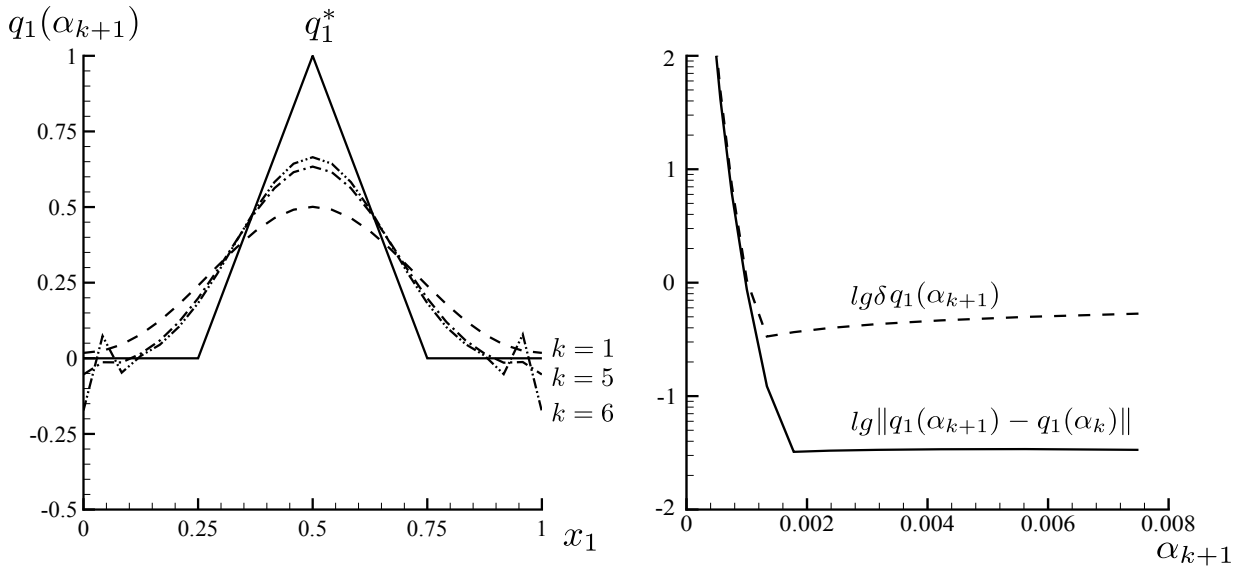


Рис. 7. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима.

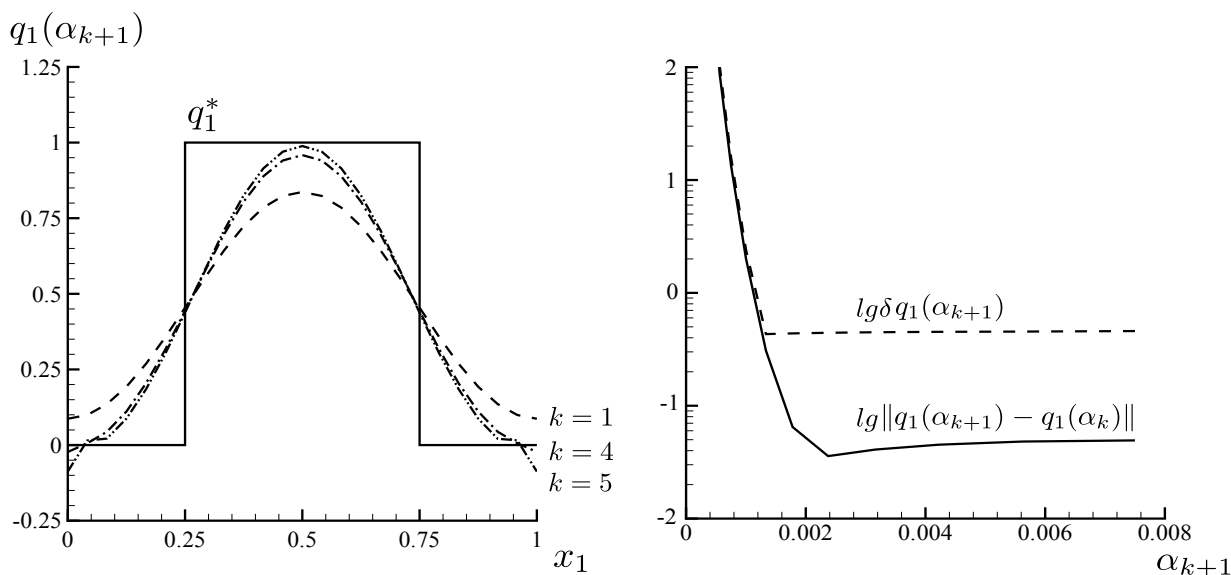


Рис. 8. Восстановление разрывного граничного режима.

По полученным результатам можно сделать заключение о применимости метода квазиобращения к решению обратных задач 1 и 2. Причем, в случае восстановления постоянного и гладкого граничных режимов метод дает хорошие результаты. В остальных случаях полученные численные решения достаточно плохого качества.

Метод квазиобращения дает схожие с вариационным методом результаты при восстановлении постоянного, кусочно-гладкого и разрывного граничных режимов, но гораздо менее требователен к вычислительным ресурсам. При восстановлении гладких граничных режимов вариационный метод выигрывает в точности.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК:

[1] *Korotkii A.I., Kovtunov D.A.* Reconstruction of Boundary Regimes in the Inverse Problem of Thermal Convection of a High-Viscosity Fluid // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2006. Vol. 255. Suppl. 2. P. 81–92.

[2] *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* О разрешимости стационарных задач естественной тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 1. С. 61–73.

[3] *Ковтунов Д.А.* Разрешимость стационарной задачи тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 1. С. 74–85.

[4] *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Оптимальное граничное управление

системой, описывающей тепловую конвекцию // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 76—101.

Другие публикации:

[5] *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Реконструкция граничных режимов // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби : Тр. междунар. семинара. Екатеринбург, 22—26 июня 2005 г. : в 2 т. Екатеринбург : Изд-во УрГУ. 2006. Т. 2. С. 82—91.

[6] *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Реконструкция граничных режимов // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби : Тезисы докладов междунар. семинара. Екатеринбург, 22—26 июня 2005 г. Екатеринбург : Изд-во УрГУ. 2005. С. 91.

[7] *Короткий А.И., Ковтунов Д.А., Цепелев И.А., Исмаил-Заде А.Т.* Восстановление граничных режимов в задачах динамики высоковязкой жидкости // Тихонов и современная математика : Обратные и некорректно поставленные задачи : Тезисы докладов междунар. конференции. Москва, 19—25 июня 2006 г. М. : Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2006. С. 101—102.

[8] *Ковтунов Д.А.* Идентификация граничных режимов в задачах свободной конвекции высоковязкой жидкости // Тезисы докладов III Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». Абрау—Дюрсо, 4—10 сентября 2006 г. Екатеринбург : Изд-во УрО РАН. 2006. С. 58—59.

[9] *Ковтунов Д.А.* Решение обратных граничных задач естественной тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Алгоритмический анализ неустойчивых задач : Тезисы докладов междунар. конференции. Екатеринбург, 1—6 сентября 2008 г. Екатеринбург : Изд-во УрГУ. 2008. С. 129.

[10] *Ковтунов Д.А.* Разрешимость стационарных задач естественной тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тезисы докладов IV Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». Абрау—Дюрсо, 15—21 сентября 2008 г. Екатеринбург : Изд-во УрО РАН. 2008. С. 30—31.

[11] *Korotkii A.I., Kovtunov D.A.* Optimal boundary control of a system describing thermal convection // Актуальные проблемы теории устойчивости и управления : Тезисы докладов междунар. конференции. Екатеринбург, 21—26 сентября 2009 г. Екатеринбург : Изд-во УрО РАН. 2009. С. 170—172.